

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**  
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ-ĐỊA CHẤT**

-----

**BÁO CÁO HỌC THUẬT**

**MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC XÁC SUẤT THƯỜNG GẶP**

**ThS Nguyễn Thu Hằng**

**Hà nội, tháng 12 năm 2022**

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**  
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ-ĐỊA CHẤT**

-----

**BÁO CÁO HỌC THUẬT**

**MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC XÁC SUẤT THƯỜNG GẶP**

**Xác nhận của bộ môn**

**Hà nội, tháng 12 năm 2022**

## MỤC LỤC

Lời giới thiệu	1
1. Một số bất đẳng thức xác suất thường gặp	2
2. Một số ví dụ ứng dụng	6

## **LỜI GIỚI THIỆU**

Bất đẳng thức là một vấn đề quan trọng của toán học. Nó là một dạng toán tương đối khó và thường không có một phương pháp nào dành riêng để giải quyết một loạt các bài toán này. Mỗi một học phần toán trong chương trình đại học, sinh viên cũng sẽ được tiếp xúc với những bất đẳng thức khác nhau. Trong môn học xác suất thống kê cũng vậy. Có rất nhiều bất đẳng thức xác suất rất thú vị và có nhiều ứng dụng trong lý thuyết cũng như thực tế. Với mong muốn cung cấp thêm tài liệu để sinh viên có thể tự học, trong nội dung báo cáo này, tôi tập chung nghiên cứu những bất đẳng thức xác suất quen thuộc, gần gũi và có nhiều ví dụ thực tiễn, được ứng dụng vào bài tập trong học phần xác suất thống kê giảng dạy tại trường Đại học Mở - Địa chất.

Báo cáo học thuật chia làm hai phần

Phần 1: Trình bày về một số bất đẳng thức xác suất thường gặp

Phần 2: Trình bày một số ví dụ ứng dụng.

## 1. Một số bất đẳng thức xác suất thường gặp

### 1.1. Bất đẳng thức Markov

**Định lí.** Cho  $X$  là một biến ngẫu nhiên nhận giá trị không âm. Khi đó, với mọi  $a \geq 0$  ta có

$$P(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}$$

Chứng minh. Xét tập  $A = \{w \in \Omega: X(w) \geq a\}$ . Ta phải chứng minh

$$P(A) \leq \frac{E[X]}{a}.$$

Thật vậy, gọi  $I_A$  là biến ngẫu nhiên nhận xác định bởi  $I_A(w) = 1$  nếu  $w \in A$  và  $I_A(w) = 0$  nếu  $w \notin A$ . Ta có

$$a \cdot I_A(w) \leq X(w), \forall w \in \Omega.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} E[a \cdot I_A] &\leq E[X] \Leftrightarrow aP(A) \leq E[X] \\ &\Leftrightarrow P(A) \leq \frac{E[X]}{a}. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức Markov cho phép chúng ta liên hệ giữa xác suất với kì vọng của biến ngẫu nhiên. Trong trường hợp  $X$  là biến ngẫu nhiên bất kì, bất đẳng thức Markov có thể biểu diễn dưới dạng

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{E|X|}{a}.$$

Tuy nhiên, như ta thấy ở trên thì điều kiện để có bất đẳng thức Markov vẫn cần biến ngẫu nhiên là không âm. Để khắc phục điều này, ta có bất đẳng thức Chebyshev sau đây.

### 1.2. Bất đẳng thức Chebyshev

**Định lí.** Với mọi  $a > 0$  ta có

$$P(|X - E[X]| \geq a) \leq \frac{Var[X]}{a^2}.$$

Chúng minh. Do biến ngẫu nhiên  $(X - E[X])^2 \geq 0$  nên ta có thể áp dụng bất đẳng thức Markov.

$$\begin{aligned} P(|X - E[X]| \geq a) &= P((X - E[X])^2 \geq a^2) \\ &\leq \frac{E[(X - E[X])^2]}{a^2} = \frac{\text{Var}[X]}{a^2}. \end{aligned}$$

Tổng quát hơn ta có

$$P(|X - E[X]| \geq u) \leq \inf_{q>0} \frac{E|X - EX|^q}{u^q}.$$

Cả hai bất đẳng thức Markov và Chebyshev đều xác định giới hạn xác suất khi biết kì vọng và phương sai của biến ngẫu nhiên nhưng chưa biết phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên đó.

Một hệ quả nữa của bất đẳng thức Markov là bất đẳng thức Chernoff sau đây:

### 1.3. Bất đẳng thức Chernoff

**Định lí.** Với biến ngẫu nhiên  $X$  bất kì ta có

$$P(X \geq a) \leq \inf_s e^{-sa} E[e^{sX}].$$

Chúng minh. Áp dụng bất đẳng thức Markov, với mọi  $x \in \mathbb{R}$  ta có

$$P(X \geq a) = P(e^{sX} \geq e^{sa}) \leq \frac{E[e^{sX}]}{e^{sa}}.$$

Suy ra

$$P(X \geq a) \leq \inf_s e^{-sa} E[e^{sX}].$$

### 1.4. Luật số lớn Chebyshev

**Định lí.** Cho  $X_1, X_2, \dots, X_n$  là dãy các biến ngẫu nhiên độc lập có kì vọng và phương sai hữu hạn. Khi đó ta có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \frac{EX_1 + EX_2 + \dots + EX_n}{n}\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

Chúng minh. Đặt  $S_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ . Ta có

$$ES_n = \frac{EX_1 + EX_2 + \dots + EX_n}{n}$$

Theo giả thiết phương sai các biến ngẫu nhiên là độc lập nên tồn tại  $C > 0$  sao cho  $DX_i \leq C$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Vì các biến ngẫu nhiên là độc lập nên

$$DS_n = \frac{DX_1 + DX_2 + \dots + DX_n}{n^2} \leq \frac{nC}{n^2} = \frac{C}{n}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Chebyshev đối với biến ngẫu nhiên  $S_n$  ta được

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \frac{EX_1 + EX_2 + \dots + EX_n}{n}\right| > \varepsilon\right) = P(|S_n - ES_n| > \varepsilon) \\ \leq \frac{C}{n\varepsilon^2} \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow \infty.$$

### 1.5. Bất đẳng thức Cauchy -Buniakowski

**Định nghĩa.** Với  $p > 0$ , kí hiệu  $\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  là tập hợp các biến ngẫu nhiên  $X$  xác định trên  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  sao cho  $E|X|^p < \infty$ . Khi đó, với  $X \in \mathcal{L}^p$  ta kí hiệu

$$\|X\|_p = (E|X|^p)^{1/p}$$

là chuẩn bậc  $p$  của  $X$ .

**Định lí.** Giả sử  $X, Y \in \mathcal{L}^2$ . Khi đó

$$E|XY| \leq \|X\|_2 \|Y\|_2.$$

Chứng minh. Nếu  $\|X\|_2 \|Y\|_2 = 0$  thì hoặc  $X = 0$  h. c. c hoặc  $Y = 0$  h. c. c và do đó  $E|XY| = 0$ .

Giả sử  $\|X\|_2 \|Y\|_2 > 0$ . Áp dụng bất đẳng thức sơ cấp  $2|ab| \leq a^2 + b^2$  ta được

$$2E\left(\frac{|XY|}{\|X\|_2 \|Y\|_2}\right) \leq E\left(\frac{X^2}{\|X\|_2^2}\right) + E\left(\frac{Y^2}{\|Y\|_2^2}\right) = 2.$$

Suy ra

$$E|XY| \leq \|X\|_2 \|Y\|_2.$$

Ta có điều phải chứng minh.

Một áp dụng của bất đẳng thức Cauchy – Buniakowski là đánh giá

$$|E(X - EX)(Y - EY)| \leq E|(X - EX)(Y - EY)| \leq DXDY.$$

Suy ra, hệ số tương quan  $\rho(X, Y)$  thỏa mãn

$$|\rho(X, Y)| = \left| \frac{E(X - EX)(Y - EY)}{DXDY} \right| \leq 1.$$

Do đó, ta có tính chất quan trọng của hệ số tương quan

$$-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1.$$

### 1.6. Bất đẳng thức Holder

**Định lí.** Giả sử  $p, q \in (1, \infty)$  thỏa mãn  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  và  $X \in \mathcal{L}^p, Y \in \mathcal{L}^q$ . Khi đó

$$E|XY| \leq \|X\|_p \|Y\|_q.$$

Chúng minh. Hàm  $f(x) = x^p$  có  $f''(x) = p(p-1)x^{p-2} > 0$  với  $x \in (0, \infty)$ . Nên  $f(x)$  là hàm lồi trên  $(0, \infty)$ . Ta được

$$f(x) - f(1) = f'(1)(x - 1)$$

Hay  $x^p - 1 \geq p(x - 1)$ . Thay  $x = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{p}}, (a > 0, b > 0)$  ta được

$$\frac{a}{p} - \frac{a}{p} \geq a^{\frac{1}{p}} b^{1-\frac{1}{p}} - b \Leftrightarrow \frac{a}{p} + \frac{b}{p} \geq a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{p}}.$$

Thay  $a = \frac{|X|^p}{\|X\|_p^p}$  và  $b = \frac{|Y|^q}{\|Y\|_q^q}$  vào bất đẳng thức trên ta được

$$1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq \frac{E|XY|}{\|X\|_p \|Y\|_q}.$$

Nếu  $E|X|^p E|Y|^q = 0$  thì bất đẳng thức là hiển nhiên.

### 1.7. Bất đẳng thức Jensen

**Định lí.** Nếu hàm  $f(x)$  là hàm lồi thì với  $X$  là biến ngẫu nhiên bất kì ta có

$$E[f(X)] \geq f(E[X]).$$

Chúng minh. Đặt  $x_0 = E[X]$ . Với hàm lồi  $f(x)$  ta luôn có

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \forall x.$$

Lấy kì vọng hai vế ta được

$$\begin{aligned} E[f(X)] &\geq f(x_0) + f'(x_0)(EX - x_0) \\ &\geq f(E[X]) + f'(x_0).0 = f(E[X]). \end{aligned}$$



Ta có điều phải chứng minh.

## 2. Một số ví dụ ứng dụng

**Ví dụ 1.** Giả sử số phế phẩm của một nhà máy trong một tháng là một biến ngẫu nhiên có trung bình  $\mu = 30$ .

- Có nhận xét gì về xác suất số phế phẩm trong tháng này vượt quá 120 sản phẩm.
- Với phương sai bằng 25, hãy tính xác suất phế phẩm tháng này nằm trong khoảng  $(40, 60)$  sản phẩm.

Lời giải.

- Áp dụng bất đẳng thức Markov ta được

$$P(X > 120) \geq \frac{E[X]}{120} = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}.$$

- Áp dụng bất đẳng thức Chebyshev ta có

$$P(|X - 50| \geq 10) \leq \frac{Var(X)}{10^2} = \frac{25}{100} = 0,25.$$

Suy ra  $P(40 < X < 60) = P(|X - 50| < 10) \geq 1 - 0,25 = 0,75$ .

**Ví dụ 2.** A chơi một trò chơi rút lá bài với luật chơi như sau: Đưa cho A một bộ bài và A lần lượt rút một quân bài rồi kiểm tra màu sắc quân bài đó. Xác định giới hạn cho xác suất A rút được quân đỏ ít nhất  $\frac{3}{4}$  số lần bốc bài.

Lời giải.

Giả sử  $X_i$  là biến ngẫu nhiên nhận giá trị 1 nếu A rút được quân đỏ, nhận 0 nếu A rút được quân đen ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Và  $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  là tổng số lần A rút được quân đỏ.

Dễ thấy  $EX_i = \frac{1}{2}, i = 1, 2, \dots, n$  nên  $EX = \frac{n}{2}$ .

Sử dụng bất đẳng thức Markov ta được

$$P\left(X \geq \frac{3}{4}n\right) \leq \frac{E[X]}{\frac{3}{4}n} = \frac{2}{3}.$$

**Ví dụ 3.** Gieo một đồng xu không cân đối 200 lần và nhận thấy rằng xác suất xuất hiện mặt ngửa là  $1/10$ . Hãy đưa ra một chặn trên cho xác suất số lần mặt ngửa xuất hiện ít nhất 120 lần.

Lời giải.

Số lần xuất hiện mặt ngửa trong 200 lần gieo là một biến ngẫu nhiên  $X$  có phân phối nhị thức với  $n = 200$  và  $p = 0,1$ . Ta có  $EX = np = 20$ .

Áp dụng bất đẳng thức Markov ta được

$$P(X \geq 120) \leq \frac{E[X]}{120} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}.$$

**Ví dụ 4.** Giả sử  $X$  là biến ngẫu nhiên có kì vọng và phương sai đều bằng 16. Hãy đưa ra ước lượng cho  $P(0 < X < 32)$ .

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} P(0 < X < 32) &= P(-16 < X - 16 < 16) \\ &= P(|X - 16| < 16) = 1 - P(|X - 16| \geq 16) \\ &\geq 1 - \frac{E|X - 16|^2}{16^2} = \frac{16}{16^2} = \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

**Ví dụ 5.** Một lồng quay có 5 quả cầu được đánh các số chẵn khác nhau từ 0 đến 8. Quay 200 lần lồng quay này, các lần quay độc lập. Mỗi lần quay lọt ra một quả cầu. Gọi  $X$  là tổng các số trên các quả cầu lọt ra trong 200 lần quay. Hãy đánh giá theo bất đẳng thức Chebyshev đại lượng

$$P\left(\left|\frac{X}{200} - 4\right| \geq 0,5\right).$$

Lời giải.

$Y =$  (Số chọn được khi quay lồng quay);  $Y \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ .

Ta có bảng phân bố của  $Y$ :

Y	0	2	4	6	8
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

$$\begin{aligned} EY &= \frac{1}{5}(0 + 2 + 4 + 6 + 8) = 4; VY = EY^2 - (EY)^2 \\ &= \frac{1}{5}(0^2 + 2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2) - 4^2 = 8. \end{aligned}$$

$Y_i =$  (số chọn được ở lần quay lồng lần thứ  $i$ );  $i = \overline{1, 200}$ . Các biến ngẫu nhiên  $Y_i$  độc lập cùng phân phối với  $Y$ .

Đặt  $X = \sum_{i=1}^{200} Y_i$ . Xét  $Z = \frac{X}{200}$ . Ta có

$$EZ = E\left(\frac{1}{200} \sum_{i=1}^{200} Y_i\right) = \frac{1}{200} E\left(\sum_{i=1}^{200} Y_i\right) = \frac{1}{200} \left(\sum_{i=1}^{200} EY_i\right) = \frac{1}{200} \cdot 200 \cdot 4 = 4$$

$$DZ = D\left(\frac{X}{200}\right) = \frac{1}{200^2} D(X) = \frac{1}{200^2} D\left(\sum_{i=1}^{200} Y_i\right) = \frac{1}{200^2} \left(\sum_{i=1}^{200} DY_i\right) = \frac{1}{200^2} \cdot 200 \cdot 8 = \frac{1}{25}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Chebyshev:

$$P[|Z - EZ| \geq 0,5] \leq \frac{DZ}{0,5^2} \Rightarrow P\left[\left|\frac{X}{200} - 4\right| \geq 0,5\right] \leq \frac{\frac{1}{25}}{0,5^2} = 0,16.$$

Ví dụ 6. Thu nhập bình quân hàng năm của dân cư một vùng là 700USD và độ lệch chuẩn là 120USD. Hãy xác định một khoảng thu nhập hàng năm quanh giá trị trung bình của ít nhất 95% dân cư vùng đó.

Lời giải.

Gọi X là thu nhập hàng năm của dân cư vùng đó thì X là biến ngẫu nhiên với quy luật phân phối xác suất chưa biết nhưng kì vọng toán  $EX=700$  và độ lệch chuẩn  $\sigma_X = 120$ .

Áp dụng bất đẳng thức Chebyshev ta có

$$P(|X - EX| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{VarX}{\varepsilon^2}.$$

Suy ra

$$P(|X - 700| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{120^2}{\varepsilon^2} = 0,95.$$

Từ đó ta tính được  $\varepsilon = 536,656$ . Vậy ít nhất 95% dân cư vùng đó có thu nhập trong khoảng  $(700-536,656; 700+536,656)$ , tức là trong khoảng  $(163,344; 1236,656)$ .

## KẾT LUẬN

Báo cáo đã trình bày về một số bất đẳng thức xác suất quen thuộc như bất đẳng thức Markov, bất đẳng thức Chebyshev, bất đẳng thức Cauchy-Buniakowski, bất đẳng thức Jensen... Tài liệu có thể dùng làm tài liệu tham khảo cho giảng viên, sinh viên, làm sinh động thêm những ứng dụng của môn xác suất thống kê đối với các vấn đề thực tiễn trong cuộc sống. Tuy nhiên, đây chỉ là một nội dung nhỏ trong vô vàn những ứng dụng thú vị của môn học này. Trong thời gian tới, tác giả sẽ tiếp tục tìm hiểu thêm nhiều ứng dụng thực tế của Toán học nói chung và môn xác suất thống kê nói riêng, để ngày càng nâng cao chất lượng bài giảng hơn.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. N.D.Tiến, V.V.Yên, *Lý thuyết xác suất*, NXB Giáo dục 2006.
2. N.C.Văn, T.T.Ninh, *Giáo trình Lý thuyết xác suất và thống kê toán*, NXB Đại học Kinh tế quốc dân, 2004
3. N.T.T.Hà, *Một số bất đẳng thức xác suất và ứng dụng*, Khóa luận tốt nghiệp Đại học.